บทที่ 5

อนุกรมของจำนวนจริง

ให้ $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ เราสร้างลำดับใหม่ดังนี้

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow (S_n)_{n\geq 1}$$

เราเรียกลำดับ $(S_n)_{n\geq 1}$ ว่าอนุกรม (series) ที่เกิดจากลำดับ $(a_n)_{n\geq 1}$ และเรียก S_n ว่าผลบวกย่อยที่ n (nth partial sum)

- ถ้า ลำดับ $(S_n)_{n\geq 1}$ ลู่เข้า แล้ว เราจะกล่าวว่าอนุกรมลู่เข้า (converges) และเขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ลู่เข้า} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty\right]$$

และเรียก $\lim_{n\to\infty} S_n$ ว่าผลรวม (sum)

• ถ้าลำดับ $(S_n)_{n\geq 1}$ ลู่ออก แล้ว เราจะกล่าวว่า อนุกรมลู่ออก (diverges) และเขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ลู่ออก} \qquad \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty\right]$$

ตัวอย่าง: จงตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\underline{n(n+1)}}$ ลู่เข้า/ลู่ออก

วิธีทำ สังเกตว่า $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

จะได้ $S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ลู่เข้า และผลรวมเท่ากับ 1

□

ตัวอย่าง: จงตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ลู่เข้า/ลู่ออก

วิธีทำ พิจารณา $a_n = (-1)^n$

จะได้ว่า

$$S_1 = a_1 = (-1)^1 = -1$$

$$S_2 = a_1+a_2 = (-1)^1+(-1)^2 = -1+1 = 0$$

$$S_3 = a_1+a_2+a_3 = (-1)^1+(-1)^2+(-1)^3 = (-1)+1+(-1) = -1$$

$$S_4 = 0$$

$$\vdots$$

$$S_n = \begin{cases} -1 & ; n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 0 & ; n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

เนื่องจาก $(S_n)_{n\geq 1}$ ลู่ออก ดังนั้น $\sum_{n=1}(-1)^n$ ลู่ออก

อนุกรมเรขาคณิต (Geometric series)

ให้ $0 \neq a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ อนุกรม (geometric series) คือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} := a + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

และเรียก a ว่าพจน์เริ่มต้น และเรียก r ว่าอัตราส่วนร่วม

ตัวอย่าง: จงหาพจน์เริ่มต้นและอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิตต่อไปนี้

① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $a=\frac{1}{9}$ และ $r=\frac{1}{3}$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5\cdot 5^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

→ $a=\frac{2}{5}$ และ $r=\frac{1}{5}$

Geometric series test :

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

• ถ้า $|r|<1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$

• ถ้า $|r|\geq 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1} = +\infty$

ตัวอย่าง: ① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{9}$; $r=\frac{1}{3}<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{6}$

② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n 5 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^5\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow a=-\frac{5}{4}$; $r=-\frac{1}{4} \Rightarrow |r|=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}<1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = \frac{-5/4}{1-(-\frac{1}{4})} = -1$$

$$③ \sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n} 5^{1-n} = 3^{2(0)} 5^{1-0} + \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} 5^{1-n}$$

$$= 5 + \sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} 5^{1-n}$$

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} 5^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{5^{n-1}} = \sum_{n=1} 9\left(\frac{9}{5}\right)^{n-1}$

$$\Rightarrow a = 9 \; ; r = \frac{9}{5} > 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n} 5^{1-n} = +\infty$$

$\square$

Divergent test:

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของอนุกรมของจำนวนจริง

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

<u>ตัวอย่าง</u>: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1 \neq 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = +\infty$$

② $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$; $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2 = +\infty$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{n}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{5}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2+\frac{5}{n}} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5} = +\infty$

□

5.2 อนุกรมบวก

บทนิยาม: ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง เราจะกล่าวว่า

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมบวก ถ้า $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมบวกโดยแท้ ถ้า $a_n > 0 \ \forall n \geq 1$

① The Integral test

(5) The integral test: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ที่ $a_n \geq 0$ สำหรับทุก $n \geq 1$ และ $r \in \mathbb{N}$
ถ้า ฟังก์ชัน $f(n) := a_n$ สำหรับทุก $n \geq r$ เป็นฟังก์ชัน**ต่อเนื่อง** ✓ และ **ไม่เพิ่ม** ✓ $(f'(x) < 0)$ แล้ว จะได้ว่า

ถ้า $\int_{x=r}^{+\infty} f(x)dx < +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

ถ้า $\int_{x=r}^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

ตัวอย่าง: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

วิธีทำ ① กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \geqslant 1$

② Is f cont?: เนื่องจาก $h(x) = x$ ต่อเนื่องสำหรับทุก $x \in [1, +\infty)$ ดังนั้น $\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[1, +\infty)$

③ Is f nonincreasing?: เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x} \ \forall x \geqslant 1$

$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \forall x \geqslant 1 \Rightarrow f$: เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม

④ พิจารณา $\int_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{x=1}^{x=t} \frac{1}{x} dx$

$= \lim_{t \to +\infty} [\ln x]_{x=1}^{x=t}$

$$= \lim_{t \to +\infty} [\ln t - \ln 1] = +\infty$$

สรุปผลได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

□

ตัวอย่าง: $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

วิธีทำ ① กำหนดให้ $f(x) = x e^{-x^2} \quad \forall x \geq 1$

② Is f cont.?: $f(x) = x e^{-x^2} = \dfrac{x}{e^{x^2}}$ ← ต่อเนื่อง ← ต่อเนื่อง ⇒ ต่อเนื่อง

③ Is f ไม่เพิ่ม: สำหรับแต่ละ $x \geq 1$ จะได้ว่า

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x e^{-x^2}) = x e^{-x^2}(-2x) + e^{-x^2}$$
$$= \underbrace{(-2x^2+1)}\, e^{-x^2} < 0$$

$x^2 \geq 1 \Rightarrow 2x^2 \geq 2 > 1$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x^2 > 1 - 2x^2$

$\Rightarrow 0 > 1 - 2x^2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม

④ $$\int_{x=1}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{x=1}^{x=t} x e^{-x^2} dx$$

$$= \cdots = \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[-\frac{e^{-t^2}}{2} + \frac{e^{-1^2}}{2} \right]$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[-\overset{\nearrow 0}{\cancel{\frac{1}{2e^{t^2}}}} \overset{+\infty}{} + \frac{1}{2e} \right]$$

$$= 0 + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2e}$$

[illegible] $\int_{x=1}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx < +\infty$ ส่งผลให้ $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} < +\infty$ $\square$

ฝาก! $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln(\ln n))}$

(6) The p-series: ให้ $p \in \mathbb{R}$ พิจารณาอนุกรมพี $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$

ถ้า $p > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty$

$\left[p = 1 \; ; \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leftarrow \text{Harmonic series} \right]$

ถ้า $p \leq 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$

ตัวอย่าง: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $p = 1$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = +\infty$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; $p = 2$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} 2019n^{-1.01} = \sum_{n=1}^{\infty} 2019 \cdot \frac{1}{n^{1.01}}$; $p = 1.01$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2019n^{-1.01} < +\infty$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n \cdot n^{1/3}} = \sum \frac{-2}{n^{4/3}}$; $p = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt[3]{n}} < +\infty$

□