Note! พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ใด ๆ เราจะกล่าวว่า

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์ (a.c.) ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (c.c.) ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$

ตัวอย่าง: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

วิธีทำ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow$ a.c.

ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

วิธีทำ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

พิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ เป็นอนุกรมสลับที่ $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$

- $(a_n)_{n \geq 1}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม $\left( f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \right)$

- $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < +\infty$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (c.c.)

$\square$

(10) The ratio test: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ใด ๆ ที่

① $a_n \neq 0$ สำหรับทุก $n \geq 1$ และ ② $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

- ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ a.c.

ถ้า $1 < L \leq +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

ถ้า $L = 1$ แล้ว สรุปไม่ได้ ($\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty, < +\infty$ a.c.,$< +\infty$ c.c.)

ตัวอย่าง: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n}$

วิธีทำ พิจารณา $a_n = \frac{(2n)!}{3^n}$ และ $a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{3^{n+1}}$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2n+2)!}{3\cdot\cancel{3^n}} \times \frac{\cancel{3^n}}{(2n)!}\right| = \left|\frac{(2n+2)(2n+1)}{3}\right|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{3} = +\infty$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n} = +\infty$$

② $\sum (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$

วิธีทำ.

พิจารณา $a_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n!}$ และ $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} 2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+2} \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{(-1)^{n+1} 2^n} \right|$$

$$= \frac{2}{n+1} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n!}$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

③ $\sum \frac{(-100)^n \cdot n^n}{n!}$

D

(11) The root test: พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ใด ๆ ที่

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ a.c.

ถ้า $1 < L \leq +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

ถ้า $L = 1$ แล้ว สรุปไม่ได้ ($\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty, < +\infty$ a.c.,$< +\infty$ c.c.)

ตัวอย่าง: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n+5}{2n+3} \right)^n$

วิธีทำ

พิจารณา $|a_n| = \left|\left(\frac{4n+5}{2n+3}\right)^n\right|$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{4n+5}{2n+3}\right)^n\right|} = \sqrt[n]{\left(\frac{4n+5}{2n+3}\right)^n}$$

$$= \left(\left(\frac{4n+5}{2n+3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{4n+5}{2n+3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+5}{2n+3} = 2 > 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+5}{2n+3}\right)^n = e\infty$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{(\ln(n+1))^n}$

วิธีทำ พิจารณา $a_n = \frac{-1}{(\ln(n+1))^n}$

$$\Rightarrow |a_n| = \left|\frac{-1}{(\ln(n+1))^n}\right| = \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n+1))^n}} = \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^n} < +\infty$ [illegible]

$\square$

## บทที่ 6
## อนุกรมกำลัง
## (Power series)

<u>บทนิยาม</u>: ให้ $c \in \mathbb{R}$ และ $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$

อนุกรมกำลัง (Power series) คือ อนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \leftarrow \text{อนุกรมกำลังที่ } c$$

### 6.3 พหุนามเทย์เลอร์

<u>บทนิยาม</u>: ให้ $I \subset \mathbb{R}$ และ $c \in I$ และ $n \geq 0$

ถ้า $f, f', f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(n)}$ หาค่าได้ แล้ว

เราจะเรียก

$$T_k[f,c] = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

ว่า พหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น $k$ สำหรับ $f$ รอบจุด $c$

- ถ้า $c=0$ เราจะเรียก

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ว่า พหุนามแมคคลอรีน ระดับขั้น $k$ สำหรับ $f$

**Note!**

$$T_k[f,c] = \frac{f(c)}{0!}(x-c)^0 + \frac{f'(c)}{1!}(x-c)^1 + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

ตัวอย่าง : จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น 3 สำหรับ $f(x)=\cos 2x$ รอบจุด 0

วิธีทำ สูตร $T_3[f,c] = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2$$

$$+\frac{f'''(c)}{6}(x-c)^3$$

ดังนั้น

$$f(x) = \cos 2x \Rightarrow f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(x) = -2\sin 2x \Rightarrow f'(0) = -2\sin 2(0) = 0$$

$$f''(x) = -4\cos 2x \Rightarrow f''(0) = -4$$

และ $f'''(x) = 8\sin 2x \Rightarrow f'''(0) = 0$

เพราะฉะนั้น

$$T_3[\cos 2x, 0] = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{6}(x-0)^3$$

$$= 1 + 0(x-0) + \frac{(-4)}{2}(x-0)^2 + \frac{0}{6}(x-0)^3$$

$$= 1 - 2x^2$$

D

ฝาก! จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น 4 สำหรับ $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$ รอบจุด $c = 0$

$f(x) = \frac{1}{x}$ รอบจุด $c = 1$

<u>ข้อสอบ!</u> 108 - 111 คะแนน (50 %)

มี 3 ส่วน - 36-37 คะแนน
- 36-37 คะแนน
- 36-37 คะแนน

$\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}$, $\frac{\partial \ln \frac{1}{xy}}{\partial y}$

จงหาพจน์ทั่วไปของ

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

$\sum \frac{1}{2^n} = \square$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} =$

<u>ส่วนที่ 1:</u> 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9

$\sqrt{1.01^2 + 0.98^2}$

<u>ส่วนที่ 2:</u> 3.10, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5

- หาจุดวิกฤต
- $\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,\ldots) & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

<u>ส่วนที่ 3:</u> 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 6.3